Exercice 3 – Corrigé

- Répondre svp dans l'espace dédié en utilisant un stylo (ou feutre fin) noir ou bleu foncé.
- Votre réponse doit être soigneusement justifiée : toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse.

Il est bon de décomposer la résolution de ce genre d'exercice à priori complexe en quatre parties. Dans un premier temps (**analyser**), il s'agit de bien appréhender le problème. Quelle est sa thématique ? Ensuite (**lister**), on pose les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème, qui sera l'étape suivante (**résoudre**). Finalement, si cela est possible, on vérifie nos résultats (**vérifier**).

Diagonalisation

Soit A une matrice de taille 3×3 telle que

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs propres de la matrice A associés aux valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 3$ respectivement.

Déterminer A.

Analyser. Il s'agit de déterminer la matrice A si l'on connaît ses valeurs propres et des vecteurs propres associés.

Lister. Il faut penser à se rappeler la définition de diagonalisation.

Résoudre. Comme A est une matrice de taille 3×3 et qu'elle dispose de trois valeurs propres de multiplicité 1, elle est diagonalisable. Elle peut donc s'écrire sous la forme

$$A = PDP^{-1}$$

où

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Le calcul de la matrice inverse

$$\left(P \;\middle|\; \mathrm{I}_3 \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\mathrm{I}_3 \;\middle|\; P^{-1} \right)$$

nous donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$A = (PD)P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$